Calcul approché d'une intégrale

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie I – Etude d'une fonction

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$* par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1.a Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$*.

1.b Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$.

1.c Etudier les variations de la fonction g. On montrera en particulier que l'équation $g(x)=0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}^+$*, cette solution sera notée m.

2.a Dresser le tableau de variations de f.

On calculera les limites de f en 0 et $+\infty$, et on montrera que $f(m)=\dfrac{1}{2m^2}$.

2.b Représenter dans un repère orthonormé la courbe d'équation $y=f(x)$.

On donnera une valeur approchée de m à 10^{-2} près en précisant la méthode utilisée.

Partie II – Etude d'une fonction intégrale

On étudie dans cette partie la fonction F définie par : $\forall x>0, F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x \dfrac{\ln t}{1+t^2}\,dt$.

La courbe représentative de F sera notée Γ.

1.a Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}^+$*.

1.b Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}^+$*.

1.c Calculer $F'(x)$ pour $x>0$.

2. Montrer que : $\forall x>0, F(x)=F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3.a Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$* par : $\forall x>0, \varphi(x)=\dfrac{\arctan x}{x}$.

Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

3.b Montrer que : $\forall x>0, F(x)=\arctan x\ln x-\int_1^x \varphi(t)\,dt$.

3.c En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.
La nouvelle fonction ainsi obtenue sera encore notée F.
Que peut-on dire de F au voisinage de $+\infty$?

3.d Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0.
Que peut-on dire de Γ au point d'abscisse 0 ?

4. Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.

4.a Pour $k\in\mathbb{N}$ et $x>0$, calculer $I_k(x)=\int_1^x t^k\ln t\,dt$.

4.b Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x>0, \dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.

4.c En déduire, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in]0,1[$, une majoration de $\left|F(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right|$.

4.d On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

Montrer que : $\left|F(0)-u_n\right|\le\dfrac{1}{(2n+3)^2}$.

4.e Donner, en *détaillant la méthode utilisée*, une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$.

5. Tracer l’allure de la courbe Γ . On précisera le point d’inflexion.